

1 正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組 (a, b) は条件 $0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b)$, $0 < b - r(b) < \frac{4}{3}r(ab)$ を満たすとする。

(1) $a - r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2) a, b を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n + 3^n(n-1, 2, \dots)$ で定める。

(1) $b_n = a_n - 3^n$ とおく。 b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) a_n を求めよ。

(3) $a_n < 10^{10}$ を満たす最大の正の整数 n を求めよ。

ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010, \log_{10}3 = 0.4771$ としてよい。

3 ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t : 1 - t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とおき、 $A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 を $t : 1 - t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とおく。ただし、 $0 < t < 1$ とする。

(1) $A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2) (1) のとき、 $A_2B_2C_2$ は ABC に相似であることを示し、その相似比を求めよ。

4 放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 ℓ と、点 $B(b, b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし、 $a < b$ とする。

(1) 2 直線 ℓ, m と放物線 $y = x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2) 点 C が放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ 上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

5 H 大学には 4 つの食堂があり、 A 君と B さんは、それぞれ毎日正午に、前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日、二人は別々の食堂で食事をしたとして、以下の確率を求めよ。

(1) n 日後に、はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし $n \geq 1$ とする。

(2) n 日後に、二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし、 $n \geq 2$ とする。