❶ 平面上に原点 O から出る、相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり、$\angle XOY < 180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を、半直線 OY 上に O と異なる点 B を取り、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

（1）点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき、$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

（2）$\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P と置くとき、$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および、3 辺の長さ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ を用いて表せ。

❷ 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ と、実数 x, y, z, w を成分とする行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を考える。次の問いに答えよ

（1）X について関係式 $XA = AX$ が成立するための x, y, z, w の条件を求めよ。

（2）X が $X^2 = A$ を満たすとき、$XA = AX$ が成立することを示せ。

（3）$X^2 = A$ を満たす行列 X を全て求めよ。

❸ xy 平面において放物線 $C : y = x^2$ と、その下側にある点 $P(p,\, q)(q < p^2)$ を考える。P を通るような C の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ A, B とする。また、P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする。

点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし、点 S, T の x 座標をそれぞれ s, t とする。次の問いに答えよ。

（1）$a + b$, ab を p, q で表せ。

（2）$s + t$, st を p, q, m で表せ。

（3）直線 AB と、直線 AT の交点を Q とし、Q の x 座標を u とする。$s < u < t < p$ となる場合について、等式 $\dfrac{1}{PS} + \dfrac{1}{PT} = \dfrac{2}{PQ}$ が成立することを示せ。

❹ x, y, x 空間に 3 点 $P(1,\, 1,\, 0)$, $Q(-1,\, 1,\, 0)$, $R(-1,\, 1,\, 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

（1）t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき、平面 $z = t$ と、$\triangle\, PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

（2）$\triangle\, PQR$ を z 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

❺ $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし、i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

（1）α を解に持つような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$(p, q は実数）を求めよ。

（2）整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、解の 1 つは α であり、また $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に実数解を一つ持つとする。このような整数の組 $(a,\, b,\, c)$ をすべて求めよ。